Ma500054324

den 1 april 2014
10:57

v, inte y här

$$\begin{cases} m \cdot \dfrac{dv}{dt} = mg - kv & \text{(i princip Newtons 2:a lag)} \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

Vi snyggar till diff.ekv och löser den:

$$m \cdot v' = mg - k \cdot v$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$mv' + kv = mg$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$v' + \frac{k}{m} v = g$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \text{(Lite jobb)}$$

$$\vdots$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$v = Ce^{-k/m\,t} - \frac{gm}{k}$$

$$v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{gm}{k} \quad \text{så}$$

$$v(t) = \frac{gm}{k}\left(e^{-k/m \cdot t} - 1\right)$$

Låt $t \to \infty$. Klart att $m > 0$.

1) om $k > 0$ (svarar mot inbromsning / luftmotstånd)
fås

$$e^{-k/m \cdot t} \to 0 \quad \text{då} \quad t \to \infty$$

och

$$v(t) \to \frac{gm}{k}$$

Fallhast närmar sig alltså $v = \frac{gm}{k}$ och överstiger aldrig denna.

2) Om $k < 0$ (inte så realistiskt, innebär att man "knuffar på")

fås

$$e^{-k/m \cdot t} \to \infty$$

och

$$v(t) \to \infty \quad \text{då} \quad t \to \infty$$

Hastigheten växer alltså obegränsat.