1099b

den 3 mars 2011
08:48

$$z^2 = -\frac{3}{4} + i$$

Sätt $z = x + iy$. Då fås

$$(x+iy)^2 = -\frac{3}{4} + i$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2xyi - y^2 = -\frac{3}{4} + i$$

Identifiera real och imaginärdelar

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -\frac{3}{4} & (\mathrm{I}) \quad \text{Realdelar lika} \\ 2xy = 1 & (\mathrm{II}) \quad \text{Imaginärdelar lika} \end{cases}$$

Lös detta ekv. system.

Ur II fås $y = \frac{1}{2x}$

Insatt i I ger

$$x^2 - \left(\frac{1}{2x}\right)^2 = -\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^2 - \frac{1}{4x^2} = -\frac{3}{4}$$

$$x^2 - \frac{1}{4x^2} = -\frac{3}{4}$$

$$\underbrace{4x^4 - 1 = -3x^2}_{\text{I princip en andragradare i } x^2} \qquad (\text{förläng med } 4x^2)$$

Sätt $x^2 = t$ så

$$4t^2 - 1 = -3t$$

$$\Leftrightarrow$$

$$4t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$t = -\frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{1}{4}} = -\frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{16}{64}} =$$

$$= -\frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{64}} = -\frac{3}{8} \pm \frac{5}{8}$$

$$t_1 = \frac{1}{4} \qquad \overbrace{t_2 = -2}^{\text{förkastas ty } t = x^2 \geq 0}$$

Bestäm x: $\quad x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

Bestäm y (för varje x)

$x = \frac{1}{2}$ ger $y = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1$

$x = -\frac{1}{2}$ ger $y = \frac{1}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = -1$

Alltså är lösningarna till $z^2 = -\frac{3}{4} + i$

$z_1 = \frac{1}{2} + i$, $z_2 = -\frac{1}{2} - i$

Pust! :)