1054

den 27 januari 2011
21:32

Visa att $z+\frac{1}{z}$ är reellt om $|z|=1$!

Alt 1: "Brute force"

Brute force innebär här att vi arbetar med formen $z=x+iy$.

Villkoret $|z|=1$ betyder att

$$\sqrt{x^2+y^2}=1 \iff x^2+y^2=1$$

Vi får nu

"gamla fina" konjugatet

$$z+\frac{1}{z}=x+iy+\frac{1}{x+iy}=x+iy+\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=$$

$$=x+iy+\frac{x-iy}{\underbrace{x^2+y^2}_{\text{detta var visst }=1}}=x+iy+x-iy=2x$$

Inga i kvar, alltså reellt.

Alt 2: Använd räkneregler för konjugat

Alt 2: Använd räkneregler för konjugat (som man i så fall bör ha tänkt igenom tidigare)

1) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

2) $z + \bar{z}$ alltid reellt $(= 2x)$

$$z + \frac{1}{z} = z + \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = z + \frac{\bar{z}}{|z|^2} = z + \bar{z}$$

förläng med konjugat

2)

reellt

Lärdom:

Fundera någon minut på om problemet kan lösas UTAN att sätta $z = x + iy$. Om det går blir det oftast snyggt och kort.

Efter någon minut utan framgång sätter man $z = x + iy$ ...