

Diskutera hur man kan göra en kvadratisk approximation $y = g(x) = ax^2 + bx + c$ till $f(x) = e^x$ kring $x = 0$.

Lsg Det är naturligt att utgå från att $g(x)$ och $f(x)$ ska ha samma funktionsvärde och lutning då $x = 0$. Det betyder att

$$\begin{aligned} f(0) &= g(0) \\ f'(0) &= g'(0) \end{aligned}$$

Låt oss se vad det ger för villkor på a , b och c :

$$f(0) = e^0 = 1 ; \quad g(0) = c \Rightarrow c = 1$$

$$\left. \begin{aligned} f'(x) = e^x &\Rightarrow f'(0) = 1 \\ g'(x) = 2ax + b &\Rightarrow g'(0) = b \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = 1$$

För att bestämma a är det naturligt att förutsätta att dessutom

$$f''(0) = g''(0)$$

Vi får

$$\left. \begin{aligned} f''(x) = e^x &\Rightarrow f''(0) = 1 \\ g''(x) = 2a &\Rightarrow g''(0) = 2a \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Alltså väljer vi $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 1$ och
för

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

$$f(x) = e^x$$

