2142

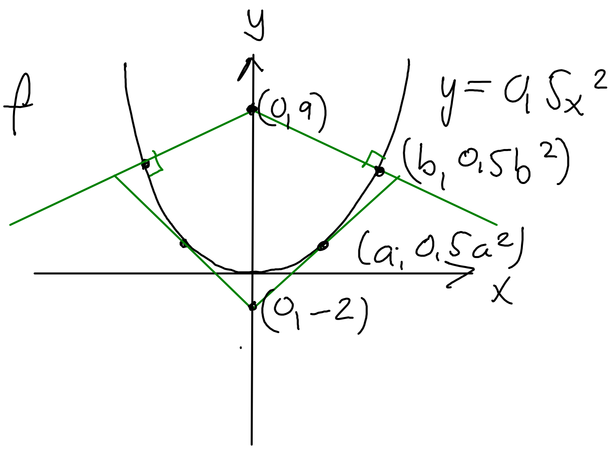
den 25 januari 2010
09:05

Rita kurvan $y = 0{,}5x^2$ och bestäm ekvationen för de

a) tangenter som från punkten $(0,-2)$ kan dras till kurvan

b) normaler som från punkten $(0,9)$ kan dras till kurvan.

Lsg) Skiss av graf



Det ser ut att "finnas" två linjer av vardera typ. (Av symmetriskäl kan den ena fås ur den andra.)

Observera att punkterna $(0,-2)$ och $(0,9)$ INTE ligger på $y = 0{,}5x^2$!

a) Låt $(a;\ 0{,}5a^2)$ vara tangentens tangeringspunkt på kurvan. Vi bestämmer tangentens k-värde på två sätt:

① $$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0{,}5a^2 - (-2)}{a - 0} = \frac{0{,}5a^2 + 2}{a}$$

② $y' = 2 \cdot 0{,}5x = x \Rightarrow k = y'(a) = a$

k-värdena överensstämmer så

$$\frac{0{,}5a^2+2}{a} = a \Leftrightarrow 0{,}5a^2+2 = a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}5a^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$$

Tangeringspunkterna är alltså (2,2) och (−2,2) och lutningarna 2 och −2

Tangenternas ekv blir då

① $y-(-2) = 2(x-0) \Leftrightarrow y = 2x-2$

② $y-(-2) = -2(x-0) \Leftrightarrow y = -2x-2$

b) Låt $(b; 0{,}5b^2)$ vara normalernas skärningspunkt med kurvan. Då

Normalen k-värde på två sätt

① $k = \dfrac{0{,}5b^2-9}{b-0} = \dfrac{0{,}5b^2-9}{b}$

② $k = -\dfrac{1}{k_T} = -\dfrac{1}{b}$

$b \neq 0$

sätt lika: $\frac{0{,}5b - 4}{b} = -\frac{1}{b} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}5b^2 = 8 \Leftrightarrow b^2 = 16 \Leftrightarrow b = \pm 4$

Normalernas skärningspunkter är $(4{,}8)$ och $(-4{,}8)$ och deras k-värden $-\frac{1}{4}$ respektive $\frac{1}{4}$.

Normalernas ekvationer blir då

① $y - 8 = -\frac{1}{4}(x - 4) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + 9$

② $y - 8 = \frac{1}{4}(x - (-4)) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + 9$