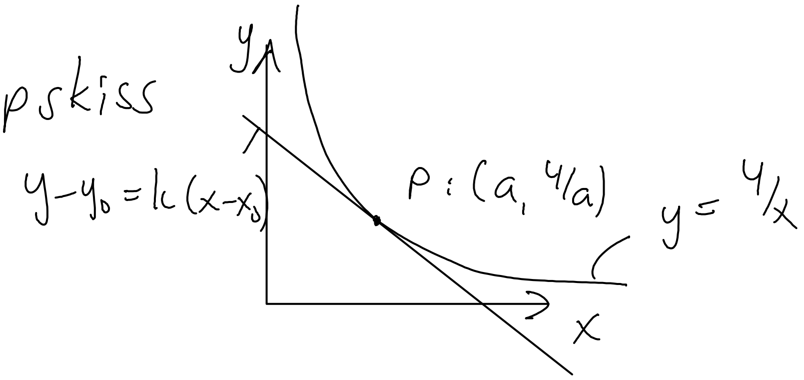
den 24 januari 2010
15:15

I en punkt på kurvan $y = 4/x$ i första kvadranten dras en tangent. Denna begränsar tillsammans med koordinataxlarna en triangel. Visa att arean av denna triangel är oberoende av valet av P.

Lsg] Principskiss



Vi bestämmer ekvationen för tangenten till $y = 4/x$ genom punkten $P = (a, 4/a)$:

$$y' = -\frac{4}{x^2} \Rightarrow y'(a) = -\frac{4}{a^2}$$

Enpunktsformeln $(y - y_0 = k(x - x_0))$ ger

$$y - \frac{4}{a} = -\frac{4}{a^2}(x - a)$$ Tangentens ekv.

Vi bestämmer tangentens skärningar med axlarna:

Skärning med x-axeln då $y = 0$, dvs

$$-\frac{4}{a} = -\frac{4}{a^2}(x - a)$$

$$\Leftrightarrow$$

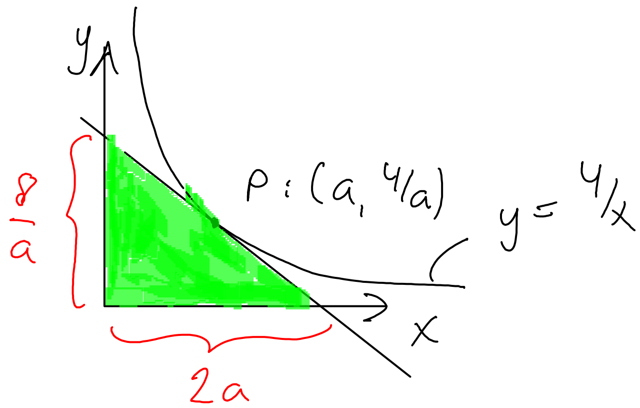
$$a = x - a$$

$$\iff$$
$$x = 2a$$

Skärning med y-axel då $x = 0$, dvs

$$y - \frac{4}{a} = -\frac{4}{a^2}(-a)$$
$$\iff$$
$$y = \frac{4}{a} + \frac{4}{a} = \frac{8}{a}$$

Vi tecknar arean av den skuggade triangeln:



$$\text{Area } A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2a \cdot \frac{8}{a}}{2} = 8 \text{ (a.e)}$$

och alltså är A oberoende av a, dvs oberoende av placeringen av punkten P.