Något oprecist om linjära diffentialekvationer

I kursen studerar vi diffentialekvationer av typen $y' + ay = f(x)$ och $y'' + ay' + by = f(x)$, där ekvationerna kallas homogena om $f(x) = 0$ och annars inhomogena. Att dessa differentialekvationer kallas linjära är såklart ingen slump. Man kan i själva verkat se vänsterledet som värdet av en linjär operator på följande sätt.

Med D betecknar vi deriveringsoperatorn, dvs $Dy = y'$. D är då en linjär operator (avbildning) på rummet av oändligt många gånger deriverbara funktioner. Man verifierar lätt att D är en linjär operator (över de reella talen).

Låt $P(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0$ vara ett polynom i variabeln r. Vi definierar då en operator $P(D)$ genom

$$P(D)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y$$

Man verifierar att $P(D)$ blir en linjär operator.

Ex. Vänsterledet i differentialekvationen $y' + ay = 0$ svarar mot polynomet $P(r) = r + a$ och operatorn $P(D) = D + a$. Differentialekvationen kan alltså skrivas $(D + a)y = 0$ och vi ser att lösningarna är precis nollrummet till den linjära operatorn (avbildningen) $D + a$.

Vänsterledet i differentialekvationen $y'' + ay' + by = 0$ svarar mot polynomet $P(r) = r^2 + ar + b$ och operatorn $P(D) = D^2 + aD + b$. Differentialekvationen kan alltså skrivas $(D^2 + aD + b)y = 0$ och vi ser att lösningarna är precis nollrummet till den linjära operatorn (avbildningen) $D^2 + aD + b$.

Följande gäller för operatorer av typ $P(D)$.

Om $P(r)$ har faktoriseringen $P(r) = (r - r_1) \cdot \ldots \cdot (r - r_n)$ så kan operatorn $P(D)$ skrivas $P(D) = (D - r_1)\ldots(D - r_n)$. $P(D)$ kan alltså skrivas som en följd av operatorer ”av grad 1”. Detta kräver såklart ett bevis. Det följer också att ordningen på de i följden ingående operatorerna saknar betydelse (de kommuterar).

Ex. För att lösa $y'' + ay' + by = 0$ skiver vi om som $(D^2 + aD + b)y = 0$. Om vi faktoriserar motsvarande polynom $r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2)$ får vi alltså $(D - r_1)(D - r_2)y = 0$ eller om vi vill $(D - r_2)(D - r_1)y = 0$.

Om $r_1 \neq r_2$ kan man visa att nollrummet till den sammansatta operatorn $(D - r_1)(D - r_2)$ är ”summan” av nollrummen för $D - r_1$ och $D - r_2$ var för sig. Alltså behöver vi bara kunna lösa $(D - r_1)y = 0$.

Vi observerar också att $P(D)(z \cdot e^{ax}) = e^{ax} \cdot P(D + a)z$. Detta gäller oavsett gradtalet på P. Om P är av första graden får vi $(D - r_1)(z \cdot e^{ax}) = e^{ax}(D + a - r_1)z$. Väljer vi ett smart a, nämligen $a = r_1$ får vi $(D - r_1)(z \cdot e^{r_1 x}) = e^{r_1 x}Dz$. Att lösa $e^{r_1 x}Dz = 0$ är nu lätt. Man får direkt att $z = C$, där C är en konstant. Alltså måste den allmänna lösningen till $(D - r_1)y = 0$ vara $y = Ce^{r_1 x}$. Således måste den allmänna lösningen till en andra ordningens differentialekvation vara $y = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$, under förutsättning att $r_1 \neq r_2$.

Lärobokens taktik för att visa att alla lösningar ges på formen ovan bygger på detta. Givet en differentialekvation $y'' + ay' + by = 0$ vill vi göra en smart ansats så y ”försvinner” och vi, i princip, får en första ordningens differentialekvation. Minns att $P(D)(z \cdot e^{ax}) = e^{ax} \cdot P(D + a)z$.

Ska alltså y-termen försvinna måste polynomet $P(r+a)$ sakna konstantterm. Det gör det precis då a är ett nollställe till $P(r)$. Vi gör således ansatsen $y = ze^{r_1 x}$, där r_1 är ett nollställe till $P(r)$ för att lyckas.

Om $P(r)$ är ett andragradspolynom med dubbelrot måste man bestämma nollrummet till operatorn $(D-r_1)^2$. Detta blir inte summan av nollrummen till de ingående förstagradsoperatorerna (eftersom det är samma operator två gånger blir de två nollrummet identiska). Här visar det sig att $(D-r_1)^2$ har en ”nollriktning” som inte är en nollriktning till $D-r_1$. (Det är helt analogt med att D^2 har en ”nollriktning” mer än D, nämligen den som spänns av $y=x$.) Gör man samma ansats som ovan så får man hela lösningsmängden.

Det som, i princip, skiljer fallen med olika eller lika rötter åt är att om $r_1 \neq r_2$ så kan vi finna tal α, β och $\gamma \neq 0$ så att $\alpha(D-r_1)+\beta(D-r_2) = \gamma I$, där I är identitetsoperatorn. Det är inte möjligt då $r_1 = r_2$.

Vill man gräva ner sig mer i detta rekommenderas i tur och ordning

Envariabelanalys av Morander, Hellström och Tengstrand

Ordinära differentialekvationer av Böiers och Andersson

/Roger