Talområden, komplexa tal och ekvationslösning

Roger Bengtsson

Spyken, Lund

January 15, 2011

Naturliga tal

De naturliga talen

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

accepteras med hjälp av (Peanos) axiom. Ibland räknas inte 0 som ett naturligt tal (eftersom det är en mycket senare "uppfinning").

Inom detta talområde kan man t.ex. lösa ekvationen

$$x + 3 = 5$$

men inte

$$x + 5 = 3.$$

Heltal

De hela talen

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

introduceras som additiva inverser till de naturliga talen. T.ex. *definieras* -2 som det tal som uppfyller att

$$2 + (-2) = 0.$$

Vi kan nu alltså lösa ekvationen

$$x + 5 = 3$$

men inte

$$5x - 3 = 0.$$

Rationella tal

De rationella talen defineras *nästan* som

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}.$$

- Hur utläses raden ovan?
- Varför *nästan*?
- Varför $b \neq 0$?

Vi kan nu lösa ekvationen

$$5x - 3 = 0$$

men inte

$$x^2 - 2 = 0.$$

- Varför kan vi inte det förresten?

Reella tal

Dessa tal är svåra att definiera. Det kan t.ex. göras med Cauchyföljder, som bygger på gränsvärden, eller med Dedekindsnitt som bygger på delmängder av de rationella talen. Vi får hålla till godo med följande

$$\mathbb{R} = \{\text{alla tal på tallinjen}\}.$$

Vi kan nu lösa ekvationen

$$x^2 - 2 = 0,$$

både $x = \sqrt{2}$ och $x = -\sqrt{2}$ är ju reella tal. Men vi kan inte lösa

$$x^2 + 1 = 0.$$

- Varför skulle vi vilja det?

Andragradsekvationer

Redan babylonierna (2000 f.Kr) kände till hur man löste andragradsekvationer. Även om de inte hade vår notation visste de i princip att

$$x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Om det skulle råka bli negativt under rottecknet är det väl lika bra att säga att ekvationen saknar lösning.

- Eller?

Tredjegradsekvationer - formel

På 1500-talet presterade italienaren Cardano (och även andra) en lösningsformel för tredjegradsekvationen

$$x^3 + mx = n.$$

En lösning ges av

$$x = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}}.$$

Tredjegradsekvationer - ett exempel

Betrakta ekvationen $x^3 - 15x = 4$.

- Är $x = 4$ är en lösning?

Cardanos formel ger

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{4^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{4^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}} =$$

$$= \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{4 - 125}} =$$

$$= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}}.$$

Tredjegradsekvationer - ett exempel

Om formeln ska fungera måste vi kunna hantera $\sqrt{-121}$, dvs kunna lösa $x^2 + 121 = 0$. Om inte så måste vi ha undantag i formeln (och det är matematiker allergiska mot).

- Kan det dessutom vara så att

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}} = 4?$$

Svaret är JA!

Slutsats: Även om vi bara vill lösa problem med reella tal tvingas vi hantera nya tal, kvadratrötter av negativa tal.

Någon har sagt: "Den kortaste lösningen av ett reellt problem går ofta via de komplexa talen."

Komplexa tal

De komplexa talen defineras som

$$\mathbb{C} = \{a + bi | a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}.$$

Exempel: $2 + 0i = 2$ så alla reella tal är komplexa, $0 + 1i = i$, $2 + 3i$.

Ekvationen $x^2 + 1 = 0$ får nu lösningarna $x = \pm i$.

- Vilka blir lösningarna till ekvationen $x^2 + 121 = 0$ och vad blir alltså $\sqrt{-121}$?

Man inser att alla andragradsekvationer kan lösas inom det komplexa talområdet.

Algebrans fundamentalsats

På 1600- och 1700-talet förmodade man att *alla* polynomekvationer var lösbara inom det komplexa talområdet.

Gauss bevisade att det var så 1799. Alltså har t.ex. ekvationen

$$x^7 - 43x^6 + 4x^5 - 9x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = 0$$

en lösning på formen $a + bi$. I själva verket har ekvationen exakt 7 lösningar på denna form. Algebrans fundamentalsats garanterar detta, men den säger inget om vilka de reella talen a och b är!

- Hur bevisar man att lösningar finns utan att finna dem explicit?

Utvidgningar av de komplexa talen

- Finns det?
- Behövs det?
- Vilka (nya) egenskaper får de nya talen?

En annan kurs!