1. a) $D(x \cdot \ln x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

b) $D\left(\frac{x^2}{e^x}\right) = \frac{2x \cdot e^x - x^2 e^x}{(e^x)^2} = \frac{2x - x^2}{e^x}$

c) $D(\sin x^2) = 2x \cdot \cos x^2$

2 a) $\int (2x+\pi)^{100} dx = \frac{(2x+\pi)^{101}}{2 \cdot 101} + C = \frac{(2x+\pi)^{101}}{202} + C$

b) $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int \cos 2x \, dx =$

$= \frac{\sin 2x}{2} + C$

c) $\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \int x^{-3/2} dx = -2x^{-1/2} + C = \frac{-2}{\sqrt{x}} + C$

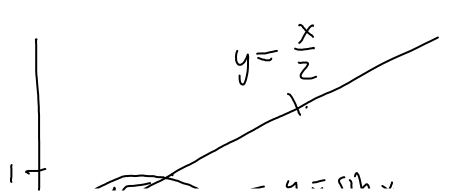
3. $f(x) = (x^2+1)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(x^2+1)^2 \cdot 2x$

$\Rightarrow f'(1) = 3 \cdot (1^2+1)^2 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$f(1) = 8$, så enpunktsformeln ger

$y - 8 = 24(x-1) \Leftrightarrow y = 24x - 16$

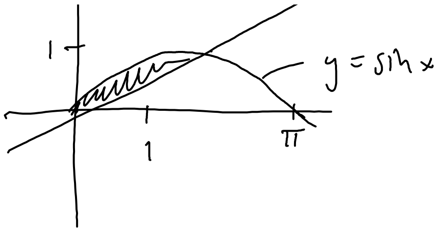
4. Skiss av område



Skärning : $\frac{x}{2} = \sin x$, $x > 0$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$



$x \approx 1{,}895$

$$A = \int_0^{1{,}895} \left(\sin x - \frac{x}{2}\right) dx = \left[-\cos x - \frac{x^2}{4}\right]_0^{1{,}895} =$$

$$= -\cos(1{,}895) - \frac{1{,}895^2}{4} + 1 \approx \underline{\underline{0{,}42}}$$

5. Ballongens volym

$$V(t) = \frac{4\pi r(t)^3}{3} \Rightarrow V'(t) = 4\pi r(t)^2 \cdot r'(t)$$

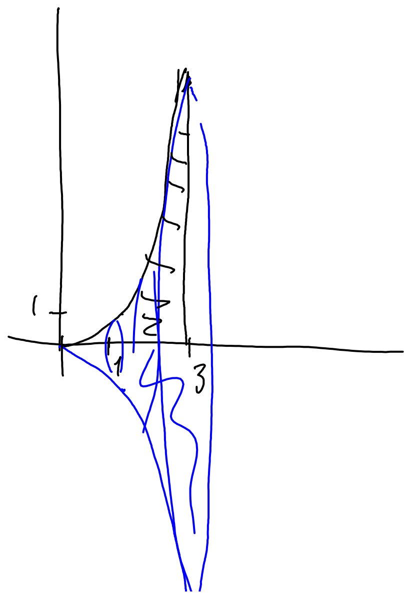
Vet $V'(t) = 1$, $r(t_0) = 1{,}5$. Vi får vid $t = t_0$:

$$1 = 4\pi \cdot 1{,}5^2 \cdot r'(t_0)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$r'(t_0) = \frac{1}{9\pi} \approx \underline{\underline{0{,}035}} \quad (\text{dm/s})$$

6. Skiss av område



$$V = \pi \int_1^3 (x^3)^2 dx =$$

$$= \pi \left[\frac{x^7}{7}\right]_1^3 =$$

$$= \frac{\pi}{7}(3^7 - 1) \approx 981 \text{ (v.e)}$$

N

7. $f(x) = \frac{1}{9} \cdot \frac{x^3}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{9} \cdot \frac{3x^2(x+2) - x^3 \cdot 1}{(x+2)^2} =$

$= \frac{x^2(2x+6)}{(x+2)^2}$

Derivatans nollställen:

$x^2(2x+6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller $x = -3$

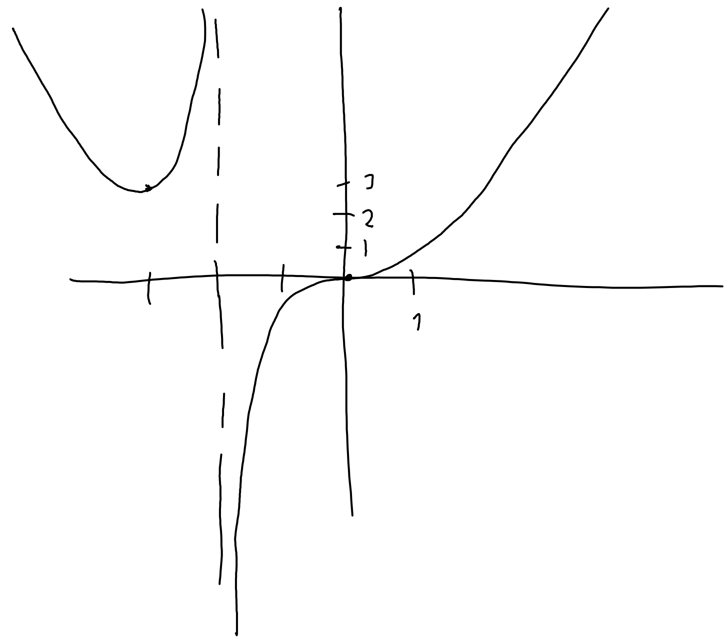
Teckenstudium

x		-3		-2		0	
f'	$-$	0	$+$	ξ	$+$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

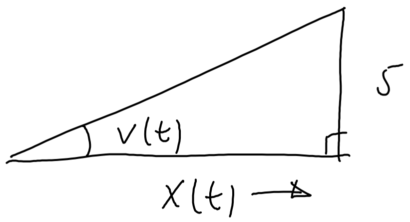
(obs $x = -2$ nollställe till nämnaren)

Horisontell tangent då $x = -3$, $x = 0$, där $x = -3$ är lokalt max och $x = 0$ är en terrass; $f(-3) = 3$, $f(0) = 0$.

Grafskiss



8.



Tydligen gäller : $\tan v(t) = \dfrac{5}{x(t)}$

Derivera m.a.p t (minns $D(\tan x) = 1 + \tan^2 x$):

$$\left(1 + \tan^2 v(t)\right) \cdot v'(t) = -\frac{5}{x(t)^2} \cdot x'(t)$$

Vi söker $\tan v(t_0)$ då $x(t_0) = 15$

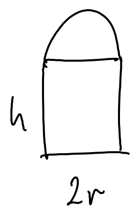
$\tan v(t_0) = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$ (lös inte ut $v(t_0)$)

Med $x'(t_0) = -600$ (obs tecknet)
fås
$$\left(1 + \left(\tfrac{1}{3}\right)^2\right) \cdot v'(t_0) = -\frac{5}{15^2} \cdot (-600)$$

$\Leftrightarrow$

$$v'(t_0) = \frac{40/3}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{40/3}{10/9} = \underline{\underline{12}} \text{ (rad/h)}$$

9. Vi inför beteckningar



$$\text{Area} = 2r \cdot h + \frac{\pi r^2}{2}$$

$$\text{Omkrets} = 2r + 2h + \pi r = 5$$

Uttryck h i r : $h = \dfrac{5 - (2+\pi)r}{2}$

Uttryck h i r : $h = \frac{5-(2+\pi)r}{2}$

Arean som funktion av radien

$$A(r) = 2r \cdot \frac{5-(2+\pi)r}{2} + \frac{\pi r^2}{2}$$

$$= 5r - (2+\pi)r^2 + \frac{\pi r^2}{2} =$$

på säker sida!

$$= 5r - \left(2+\frac{\pi}{2}\right)r^2, \quad 0 \le r \le 5$$

Maximera A:

$$A'(r) = 5 - 2\left(2+\frac{\pi}{2}\right)r = 0 \iff r = \frac{5}{4+\pi}$$

$$A''(r) = -2\left(2+\frac{\pi}{2}\right) < 0 \text{ så } r = \frac{5}{4+\pi} \text{ lok. max}$$

Eftersom $A'(r)=0$ inte har fler lösningar måste $r = \frac{5}{2+\pi}$ ger globalt max och

vi ska alltså välja

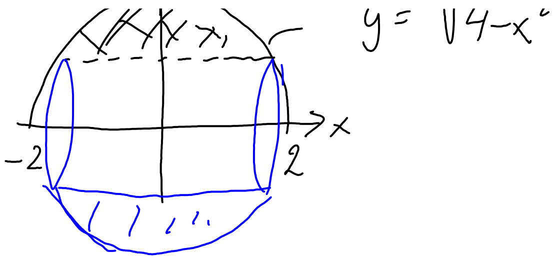
$$r = \frac{5}{4+\pi}$$

$$h = \frac{5-(2+\pi)\cdot\frac{5}{4+\pi}}{2} = \frac{5\cdot(4+\pi) - 5(2+\pi)}{2(4+\pi)}$$

$$= \frac{10}{2(4+\pi)} = \frac{5}{4+\pi} \quad (= r!)$$

10. Vi placerar en halvcirkel med centrum i origo

$y = \sqrt{4-x^2}$



Roterar vi det skuggade området runt x-axeln fås det urborrade klotet.

Vi tar reda på områdets gränser i x-led:

$$\sqrt{4-x^2} = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Alltså

$$V = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-x^2}^{\,2} - 1^2 \right) dx = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (4-x^2-1)\,dx =$$

$$= \pi \left[3x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 2\pi \cdot \left(3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3} \right) =$$

$$= \underline{\underline{4\pi\sqrt{3}}} \quad \text{v.e}$$

11. a) Sant

b) Falskt, tag $f(x) = -x^4$

c) Falskt, f och g konstanta

(finns andra mer komplicerade motexempel)

d) Sant: $\int_0^a (kx)^2\,dx = \int_0^{ka} \left(\frac{1}{k}y\right)^2 dy$

d) Sant : $\int_0^a (kx)^2 dx = \int_0^{ka} \left(\frac{1}{k}y\right)^2 dy$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{k^2x^3}{3}\right]_0^a = \left[\frac{y^3}{3k^2}\right]_0^{ka}$$

$$\Leftarrow)$$

$$\frac{k^2a^3}{3} = \frac{ka^3}{3} \quad \leftarrow$$ (kan också fås direkt från volym-formel för kon)

$$\Leftrightarrow$$

$$k = 1$$

e) Falskt, $x < \frac{\pi}{2}$ ger negativt värde

f) Falskt, derivera likheten m.a.p x:

$$3y(x)^2 \cdot y'(x) + 3x^2 = 6y(x) + 6xy'(x)$$

Om $y'(1) = 0$ så $3y(1) \cdot 0 + 3 \cdot 1^2 = 6y(1) + 6 \cdot 1 \cdot 0$

$$\Leftrightarrow \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

Men $y(1)^3 + 1^3 = 6 \cdot 1 \cdot y(1)$ (ursprungsekv)

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1^3 = 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$$

vilket är falskt.