Matematik E, 100217, Inlämningsuppgifter, Kapitel 2, Ma3000/4000

Lösningar på uppgifterna inlämnas till mig senast onsdagen 3/3 för bedömning. Den första sidan utgör G-uppgifter där man ska klara samtliga. Den andra sidan utgör VG- och MVG-uppgifter.
Det är frivilligt att lösa och lämna in uppgifterna och de är INTE betygsgrundande. Däremot ger det möjlighet till feedback och bra övning.

1. Derivera
   (a) $x \cdot \ln x$
   (b) $y = \frac{x^2}{e^x}$
   (c) $y = \sin x^2$

2. Bestäm samtliga primitiva funktioner till
   (a) $(2x+\pi)^{100}$
   (b) $\cos^2 x - \sin^2 x$
   (c) $\frac{1}{x\sqrt{x}}$

3. Bestäm ekvationen för tangenten till $f(x) = (x^2+1)^3$ i den punkt där $x = 1$.

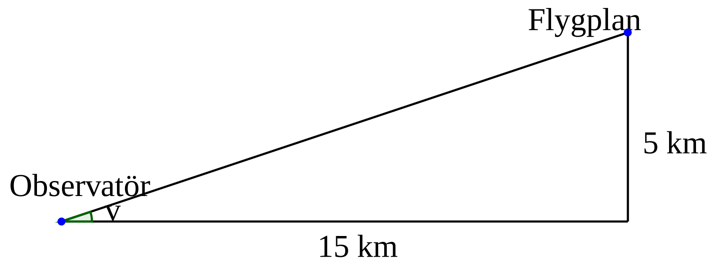
4. Bestäm, med två decimalers noggrannhet, arean av området i första kvadranten som begränsas av $y = \frac{x}{2}$ och $y = \sin x$. Kurvornas skärningspunkt får bestämmas numeriskt med t.ex. räknedosa medan integralen för arean ska tecknas och bestämmas med primitiv funktion.

5. En ballongförsäljare fyller sina ballonger med heliumgas. Påfyllningen sker med hastigheten 1 dm^3 gas per sekund. Med vilken hastighet växer radien i en klotformad ballong då radien är 1,5 dm?

6. Området som begränsas av x-axeln, kurvan $y = x^3$, linjen $x = 1$ och linjen $x = 3$ roterar runt x-axeln. Vad blir volymen av den alstrade rotationskroppen?

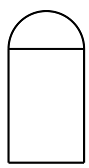
7. Bestäm (med hjälp av derivata) alla punkter med horisontell tangent och alla lokala extrempunkter till funktionen f där
$$f(x) = \frac{1}{9} \cdot \frac{x^3}{x+2}.$$
   Skissera slutligen funktionen graf, t.ex. med räknedosa.

8. Ett flygplan flyger på 5000 meters höjd med den konstanta hastigheten 600 km/h mot en punkt rakt ovanför en radarobservatör. Hur snabbt ändrar sig elevationsvinkeln v i det ögonblick när det horisontella avståndet från observatören till planet är 15 km?



Tips: Teckna ett samband mellan elevationsvinkeln $v(t)$ som alltså beror på t och avståndet $x(t)$ till planet i x-led. Derivera detta samband (derivatan av tan *behövs nog) och bestäm $v'(t_0)$.*

9. Ett kyrkfönster har formen av en halvcirkel stående på en rektangel. Om fönstret omkrets är 5 meter, bestäm de dimensioner som ger störst fönsteryta.



10. Rättigenom ett klot med radie 2 dm borras ett hål med radie 1 dm. Vilken volym återstår hos det ursprungliga klotet efter borrningen? *Tips: Betrakta en lämplig rotationskropp.*

11. Avgör, med motivering, om följande påstående är sanna eller falska.

    (a) Om $f'(a) = 0$ och $f''(a) < 0$ så har funktionen f ett lokalt maximum då $x = a$.

    (b) Om funktion f har ett lokalt maximum då $x = a$ så gäller att $f'(a) = 0$ och $f''(a) < 0$.

    (c) Det finns *inga* funktioner f och g för vilka det gäller att
    $$D(f \cdot g) = D(f) \cdot D(g).$$

    (d) Linjestycket $y = kx$, $0 \leq x \leq a$, $k > 0, a > 0$, roteras såväl runt x-axeln som y-axeln och alstrar två rotationskroppar. Om dessa båda rotationskroppar får samma volym så måste $k = 1$.

    (e) För funktionen f definierad genom
    $$f(x) = \int_{\pi/2}^{x} \sin^2 2t\, dt$$
    gäller att $f(x) \geq 0$ för alla x.

    (f) En funktion $y(x)$ uppfyller ekvationen
    $$y(x)^3 + x^3 = 6x \cdot y(x).$$
    Då gäller att $y'(1) = 0$.