Differentialekvationer - vad, varför och Newton

Roger Bengtsson

Spyken, Lund

April 27, 2011

En differentialekvation anger ett samband mellan en (okänd) funktion $y(x)$ och dess derivator. Ett exempel på en "läskig" differentialekvation är

$$y' + y^2 \cdot \sin x = y' \cdot y''.$$

Att lösa en differentialekvation innebär att finna samtliga funktioner $y(x)$ som uppfyller densamma. I allmänhet är det ett svårt problem (ovanstående differentialekvation är svårlöst) men i vissa enklare fall kan man verkligen finna $y(x)$. Vi ska strax se några sådana exempel från "verkligheten".
Att differentialekvationer är ett viktigt instrument för att modellera t.ex. biologiska och fysiska situationer framgår också.

Populationsmodell, version banal

En populations tillväxthastiget är proportionell mot storleken på populationen:

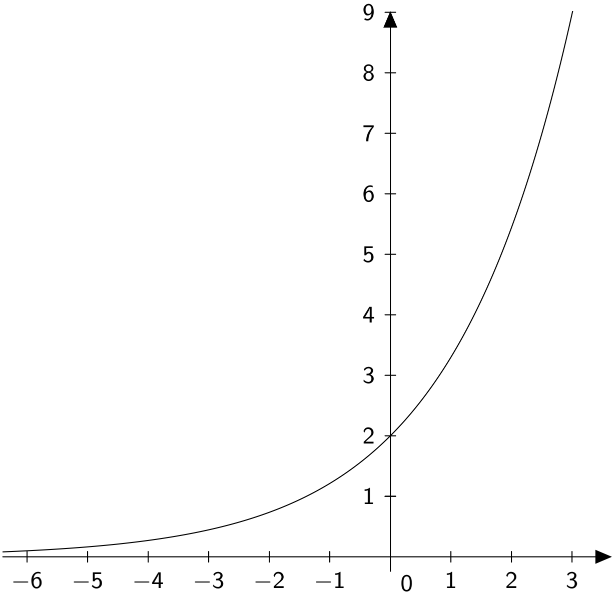
$$y'(x) = k \cdot y(x).$$

Den allmänna lösningen är

$$y(x) = Ce^{kx}$$

där C är en godtycklig konstant.

Populationsmodell, version banal



Newtons avsvalningslag

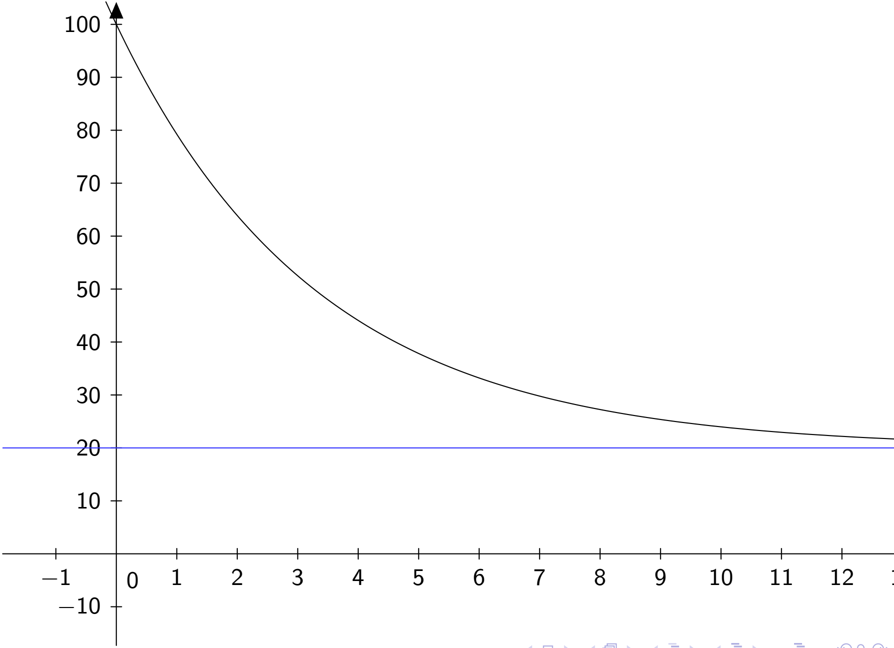
Enligt Newton (och experiment) är temperaturändringen hos ett avsvalnande objekt proportionell mot temperaturskillnaden mellan objektet och omgivningens temperatur:

$$T'(t) = k \cdot (T(t) - 20)$$

om omgivningen råkar vara 20°C.
Den allmänna lösningen är

$$T(t) = Ce^{kt} + 20.$$

Newtons avsvalningslag



Population

En populations tillväxthastighet antas bero på både populationens storlek och hur mycket populationen avviker från en övre gräns M:

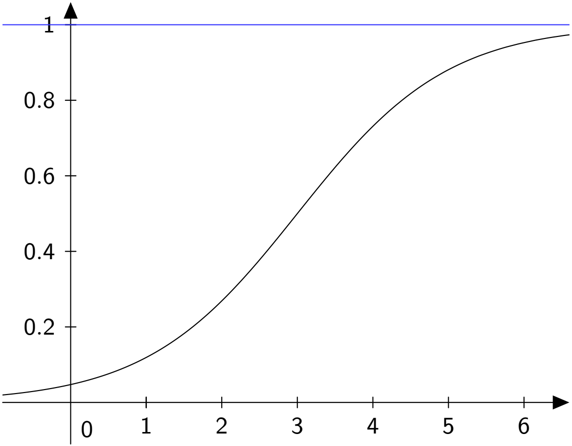
$$y'(x) = k \cdot y(x) \cdot (M - y(x)).$$

Bakterieodling i biotekniken modelleras lämpligen på detta sätt (kallas logistisk tillväxt).
Den allmänna lösningen är

$$y = \frac{CMe^{Mkx}}{M + C(e^{Mkx} - 1)}$$

(utanför E-kursens ramar).

Population



Svängande fjäder

En vikt hänger i en fjäder, som sätts i svängning. Låt $y(x)$ ange avståndet från jämviktsläget vid tiden x. Då gäller, återigen enligt Newton,

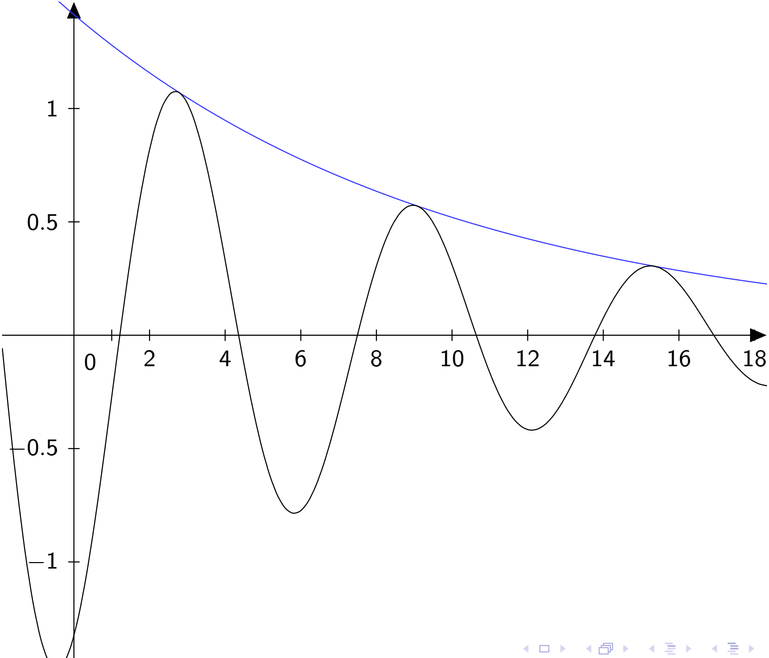
$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$$

för lämpliga konstanter a, b och en funktion $f(x)$ som svarar mot yttre kraft. Den allmänna lösningen (om det handlar just om svängande fjäder) är

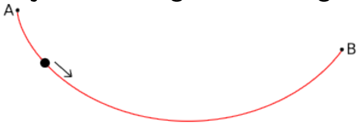
$$y(x) = e^{sx}(C_1 \sin tx + C_2 \cos tx)$$

där C_1 och C_2 är godtyckliga konstanter och s och t är tal som bestäms från den faktiska ekvationen.

Svängande fjäder



En kula ska falla från A till B som figuren visar, fast man får själv välja "röd" väg. Vilken väg tar kortast tid?



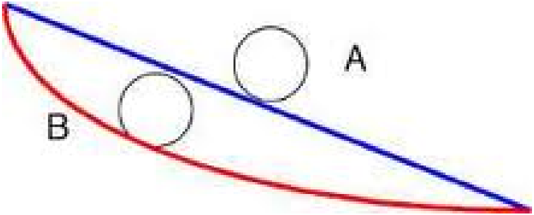
Detta problem sändes till Newton av en Bernoullibröderna. Det var tydligen svårt för Newton fick det på kvällen och fick sitta uppe hela natten för att lösa det!
Det visar sig att man ska hitta en funktion $y(x)$ som löser diffentialekvationen

$$\frac{1}{\sqrt{2gy(x)}\sqrt{1+y'(x)^2}} = C$$

(detta enligt Wolfram MathWorld, jag har inte koll).

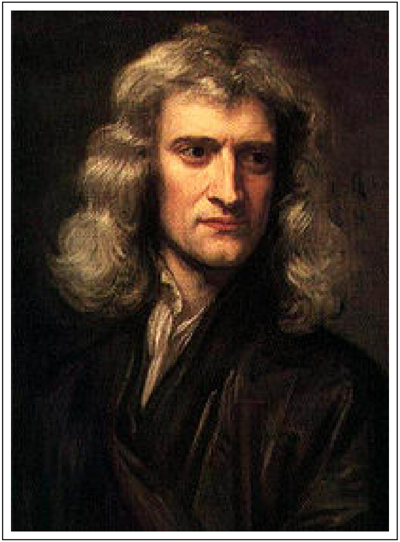
Brachistochrone

Lösningen är den så kallade Brachistochrone-kurva, som i sin tur är en upp och nedvänd cykloid. När Bernoulli fick Newtons anonyma lösning lär han ha yttrat: "Man känner igen lejonet på dess klor".



B är bäst (även om det inte råkar se ut så på den bild jag snodde på nätet).

Superkändisar i branschen

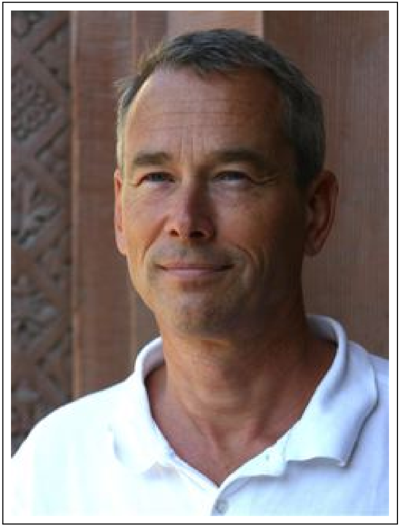


Newton

Johann Bernoulli

Lokalkändisar i branschen

Lars Hörmander



Nils Dencker