4. Skalärprodukt

ett sätt att multiplicera vektorer

"Krav" på ny räkneoperation:

1) många räkneregler uppfylls.

2) man har nytta av den.

Ex 1: $u \cdot v = 0$ (alltid); lätträknat men meningslöst

Ex 2. $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2)$ vanlig mult

Förekommer, men ej i kursen.

Hur tolkas geometriskt?

Ex 3 $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

Känns onaturlig men "vanlig", tänk

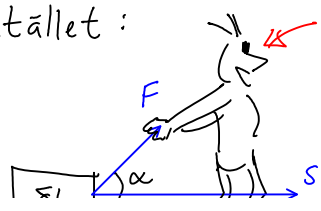
$(x_1, y_1) \sim x_1 + iy_1$, $(x_2, y_2) \sim x_2 + iy_2$

och multiplicera motsvarande komplexa tal. Då fås denna mult.

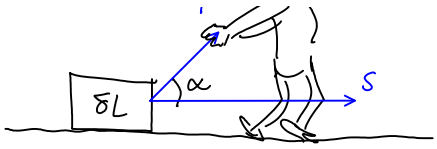
Nackdel; fungerar bara i 2-dim.

Hur tolkas geometriskt? (MaE)

Istället:



"I bok $\alpha = [u, v]$"



I bok $\alpha = [u,v]$

Arbete = "kraft i förf. riktn." · "sträcka"

längden av resp vektor

$$W = \underbrace{|F| \cdot \cos\alpha}_{\text{proj i s riktning}} \cdot |s| = |F| \cdot |s| \cdot \cos\alpha$$

Def: Med skalärprodukten $u \cdot v$ menas talet

längden

$$\begin{cases} |u| \cdot |v| \cdot \cos\alpha & ; \ 0 \le \alpha \le 180, \ u \neq 0, v \neq 0 \\ & \quad 0 \le \alpha \le \pi \\ 0 & ; \ \text{om } u = 0 \text{ eller } v = 0 \end{cases}$$

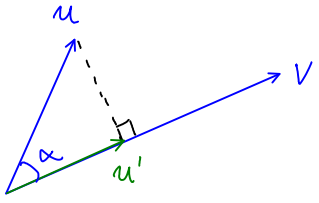
α ej definierat i detta fall.

Obs: $u \cdot v$ är ett tal inte en vektor.

Projektionsformeln (sats 1, sid 65)

Bestäm projektionen (ortogonalt, vinkelrätt)

u' av u på v:s riktning



(vi visar fallet $0° \le \alpha \le 90°$)

$u' = k \cdot v$, k sökes

$\Rightarrow$

$|u'| = k \cdot |v|$ ($|u'| = -k \cdot |v|$ om $90° < \alpha \le 180°$)

Men ($-\cos\alpha$ om $90° < \alpha \le 180°$)

$$|u'| = |u| \cdot \cos\alpha = \frac{|u| \cdot |v| \cdot \cos\alpha}{|v|} = \frac{u \cdot v}{|v|}$$

Så

$$\frac{u \cdot v}{|v|} = k \cdot |v| \Leftrightarrow k = \frac{u \cdot v}{|v|^2}$$

och $u' = \frac{u \cdot v}{|v|^2} \cdot v$ (projektionsformeln)

Memorera!

Innan konkreta exempel behöver vi

1) Kolla räkneregler

2) Lära oss räkna med skalärprodukt i koordinater.

Räkneregler (sats 2 sid 66)

Det funkar som man tror (jfr mult med heltal)

Eventuellt några exempel

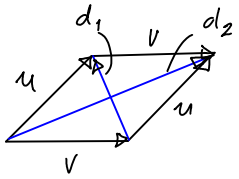
Observera: $u \cdot u = |u|^2 \Leftrightarrow \sqrt{u \cdot u} = |u|$

$u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u$ vinkelrät mot v

$u \cdot v \cdot w$ saknar mening (varför)

Ex: (4.4) Visa att diagonalerna i en romb skär varandra vinkelrätt.

ev



Vet: $|u| = |v|$; Visa $d_1 \cdot d_2 = 0$

$d_1 = -v+u$, $d_2 = v+u$ så

$d_1 \cdot d_2 = (-v+u)(v+u) = |u|^2 - |v|^2 = 0$ ∎

4.2 Skalärprodukt i koordinater

blir särskilt enkelt i ortonormerade baser (ON-baser)

Def: En bas e_1, e_2, e_3 i rummet är ortonormerad om vektorerna är parvis vinkelräta och har längd 1.

Detta kan också formuleras

$$|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1 \; ; \; e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_3 = e_2 \cdot e_3 = 0$$

eller

$$e_1 \cdot e_1 = e_2 \cdot e_2 = e_3 \cdot e_3 = 1,$$

Hur man räknar med koordinatsatta vektorer:

Låt $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$

$v = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$

$$u \cdot v = (x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) \cdot (y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3) =$$

$$x_1 y_1 e_1 \cdot e_1 + x_1 y_2 e_1 \cdot e_2 + x_1 y_3 \cdot e_1 \cdot e_3 + \ldots$$

o s v (jag orkar inte skriva ut)

$$= x_1 y_1 e_1 \cdot e_1 + x_2 y_2 e_2 \cdot e_2 + x_3 y_3 e_3 \cdot e_3 =$$

(obs att skalärprod av "olika" e_i blir noll)

$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

(obs att $e_1 \cdot e_1 = |e_1|^2 = 1^2 = 1$ osv)

Sammanfattningsvis: För vektorer i ON-bas gäller

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Man multiplicerar koordinatvis och adderar.

Ex. Hur långt är det från punkten $(1, 2, 3)$

ev till origo?

Låt $u = (1,2,3)$;

$$|u|^2 = u \cdot u = 1^2 + 2^2 + 3^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$|u| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \quad \text{(Pyth sats)}$$

Ex: Bestäm projektionen av $u = (1,2,3)$

i riktningen $v = (4,5,6)$

Proj. formeln ger

Skalärprod

mult tal - vektor

$$u' = \frac{u \cdot v}{|v|^2} \cdot v = \frac{(1,2,3) \cdot (4,5,6)}{4^2 + 5^2 + 6^2} \cdot (4,5,6) =$$

$$= \frac{4 + 10 + 18}{77} \cdot (4,5,6) = \frac{32}{77} \cdot (4,5,6)$$

Ex: Bestäm vinkeln mellan $u = (1,2,3)$ och

$v = (4,5,6)$

$$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}$$

$$\Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{32}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{77}}$$

$$\Rightarrow$$

$$\alpha = \arccos \frac{32}{\sqrt{14}\sqrt{77}} \approx 12{,}9^\circ$$

Man kan försöka sig på t.o.m 4.17.

4.3 Några geometriska tillämpningar

Här handlar det om att använda sin

"vinkelsuppfattning" och med skalärprodukten

lösa olika varianter av geometriska problem

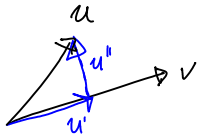
Projektionsformeln

$$u' = \frac{u \cdot v}{|v|^2} \cdot v$$

som ger u:s proj u' i v:s riktning
måste man memorera!

Några exempel (se boken för "bevis")

1) Komposantuppdelning av u i v:s riktning



Projicera u på v med proj. formeln

$$u' = \frac{u \cdot v}{|v|^2} \cdot v$$

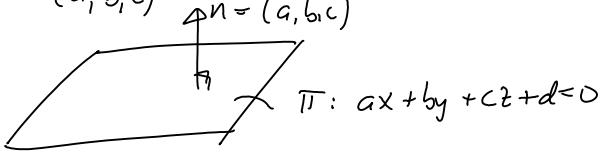
Bestäm u'' som $u'' = -u' + u = u - u''$
så $u = u' + u''$

Ex: Komposantuppdela $u = (1,2,3)$ i en vektor i riktning $v = (4,5,6)$ och en vektor vinkelrät mot v.

Enligt ovan $u' = \frac{32}{77}(4,5,6)$ och

$$u'' = (1,2,3) - \frac{32}{77}(4,5,6) = \frac{1}{77}(-51,-6,39)$$

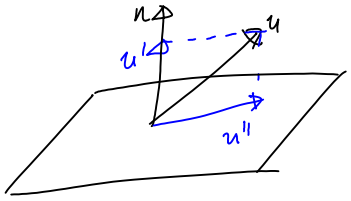
2) Planet $ax+by+cz+d=0$ har en normal $n = (a,b,c)$



Ex: Planet $2x - y + 3z - 5 = 0$

har normal $n = (2, -1, 3)$

3) Projektion av vektor i plan



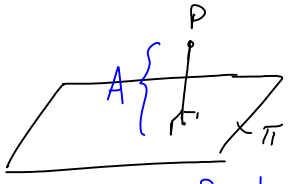
Projicera u på normalen n.

$$u' = \frac{u \cdot n}{|n|^2} \cdot n$$

Bestäm $u'' = -u' + u$

4) Avstånd punkt $P: (x_0, y_0, z_0)$ till plan

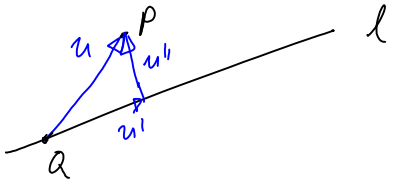
$\pi: ax + by + cz + d = 0$



P:s koord i planets ekv

Formel: $A = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

5) Avstånd punkt P till linje l



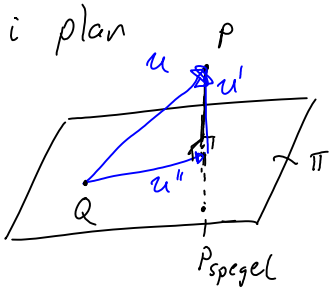
Tag Q på l (godtycklig).

Bilda $u = \overline{QP}$, och komposantuppdela

$u = u' + u''$

Avståndet ges av $|u''|$.

b) Spegling i plan P



Tag godtycklig punkt Q i π.

Bilda u och komposantuppdela

Man ser att $\overline{Q P_{spegel}} = u - 2u'$