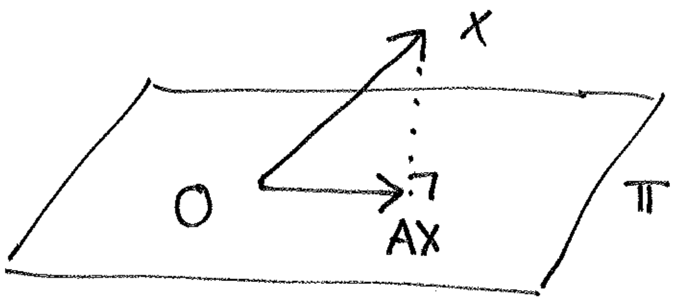
Egenvärden och egenvektorer

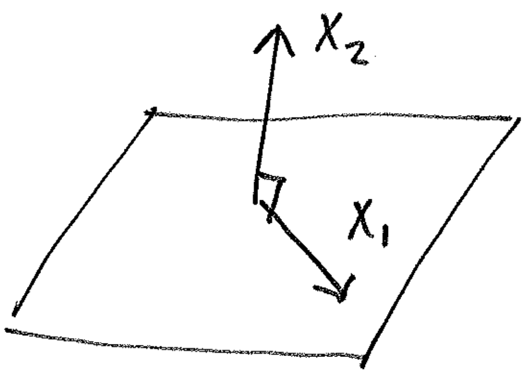
Ex: Låt $F(X) = AX$ vara den linjära avbildningen "ortogonal projektion på planet $\pi: x+2y-z=0$".

Avb. matrisen för denna kan beräknas till

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$



Från figuren ser vi att



I) $AX_1 = X_1$

för alla vektorer X_1 parallella med π.

II) $AX_2 = 0$

för alla vektorer X_2 ortogonala mot π.

Detta kan vi också kolla t.ex.

I) vektorn $(-2,1,0)$ är parallell med π (varför?)

och $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

II) vektorn $(1,2,-1)$ är ortogonal mot π och

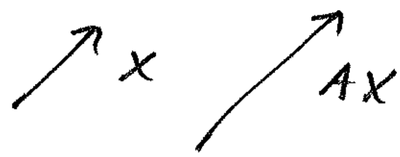
$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Def:</u> Om A kvadratisk matris och om kolonnvektorn $X \neq 0$ och talet λ uppfyller

$$AX = \lambda X$$

så säger vi att X är en <u>egenvektor</u> och att λ är ett <u>egenvärde</u> till A.

<u>Anm 1:</u> En egenvektor X är alltså parallell med AX den avbildas på.



<u>Anm 2:</u> I exemplet ovan är vektorerna i planet egenvektorer med egenvärde 1, och vektorerna ortogonala mot π egenvektorer med egenvärde 0.

OBS! $AX = 0 \cdot X$

<u>Ex:</u> Visa att matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ har egenvektorn $(1,2,1)$.

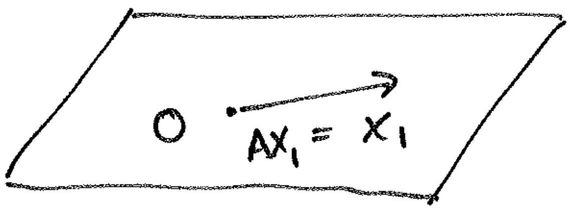
<u>Lösning:</u>

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Motsv. egenvärde 3.

Ex: Bestäm avbildningsmatrisen A för spegling i planet $\pi : x - y + 2z = 0$.

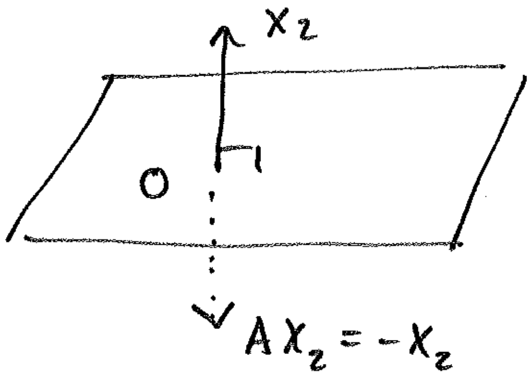
Lösning: Egenvektoner:



I) Vektoner X_1 i planet

$$AX_1 = 1 \cdot X_1$$

egenvärde 1



II/ Vektoner X_2 ort. mot planet

$$AX_2 = (-1) \cdot X_2$$

egenvärde -1

Exempelvis har vi

$$\underbrace{A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{i\ \pi}, \quad \underbrace{A\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}}_{i\ \pi}, \quad \underbrace{A\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}}_{\perp \pi}$$

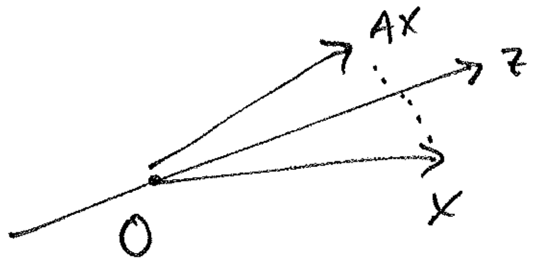
$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 0 & -1\\0 & -1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\1 & 0 & 1\\0 & -1 & -2\end{pmatrix} \iff$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ex: Vilka egenvektorer och egenvärden har avbildningen "rotation $\pi/2$ kring z-axeln (i pos. riktn. sett fr. spetsen av z-axeln)



Vektorer parallella med z-axeln är egenvektorer med egenvärde 1

(Går ej att anv. metoden ovan här!)

Hur bestämmer man egenvektorer/egenvärden till en matris?

Egenvärden: För att λ ska vara egenvärde till A

måste det finnas en vektor $X \neq 0$ sådan att ⑤

$$AX = \lambda X \iff \lambda X - AX = 0 \iff$$

$$(\lambda I - A)X = 0$$

Då $X \neq 0$ måste enligt huvudsatsen

$$\boxed{\det(\lambda I - A) = 0}$$

Ex: Bestäm egenvärden för $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Lösning: $\det(\lambda I - A) = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right| =$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^3 + 1 + 1 - 3(\lambda-2) =$$

$$= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 + 2 - 3\lambda + 6 =$$

$$= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 9) =$$

$$= \lambda(\lambda-3)^2 = 0$$

polynom!

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_{2,3} = 3 \quad \text{(dubbelrot)} \end{cases}$$

eller

Svar: $\lambda = 0$ och $\lambda = 3$.

Def: Polynomet $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ kallas för det <u>karakteristiska polynomet</u> för A, ekvationen $P_A(\lambda) = 0$ för den <u>karakteristiska ekvationen</u>.

<u>Egenvektorer:</u>

<u>Ex (forts.):</u> Vi kollar egenvärdena $\lambda = 0, 3$:

<u>$\lambda = 0$:</u>

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \overset{\text{Ge}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \end{cases}$$

<u>$\lambda = 3$:</u>

$$AX = 3X \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3x_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3x_2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

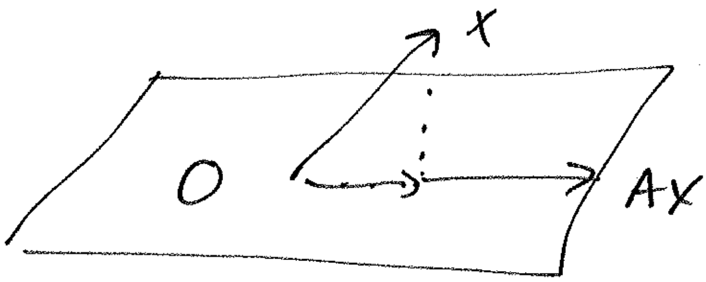
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

<u>Svar:</u> Egenvektorerna till A ges av

- $t(1,-1,1)$ $(t \neq 0)$ med egenvärde 0
- alla $(x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$ som uppfyller $-x_1 + x_2 - x_3 = 0$ med egenvärde 3.

Anm1: Vi måste få ∞ många lösningar (varför?)

Anm2: Geom. tolkning av avb. $F(X) = AX$ är



Ex:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad ?$$

Stokastiska matriser >0 summa 1

$a_i > 0$ Perron Frobenius

$\underset{\text{max}}{r > 0}$ $\quad (v_1, v_2, \ldots, v_n)$